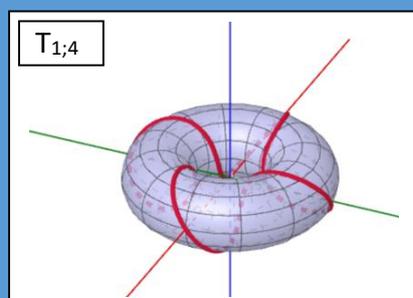
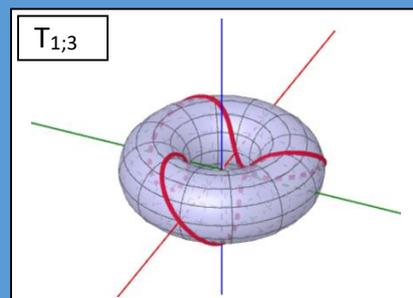
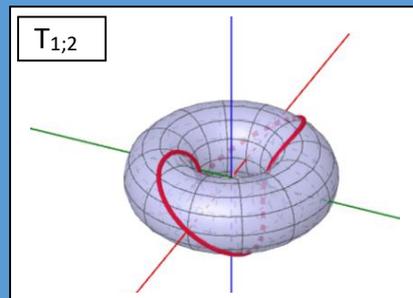
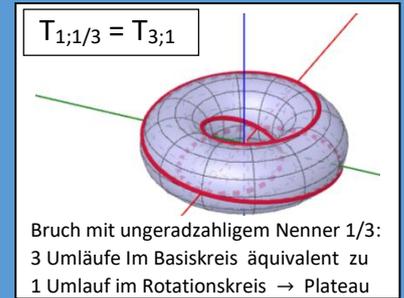
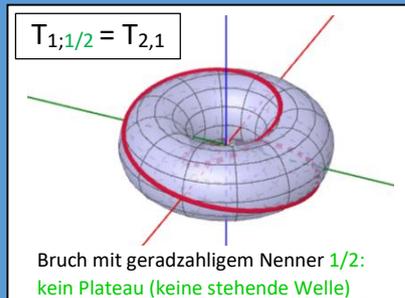
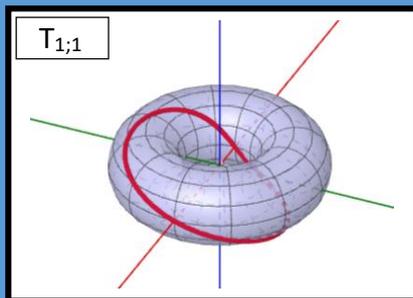


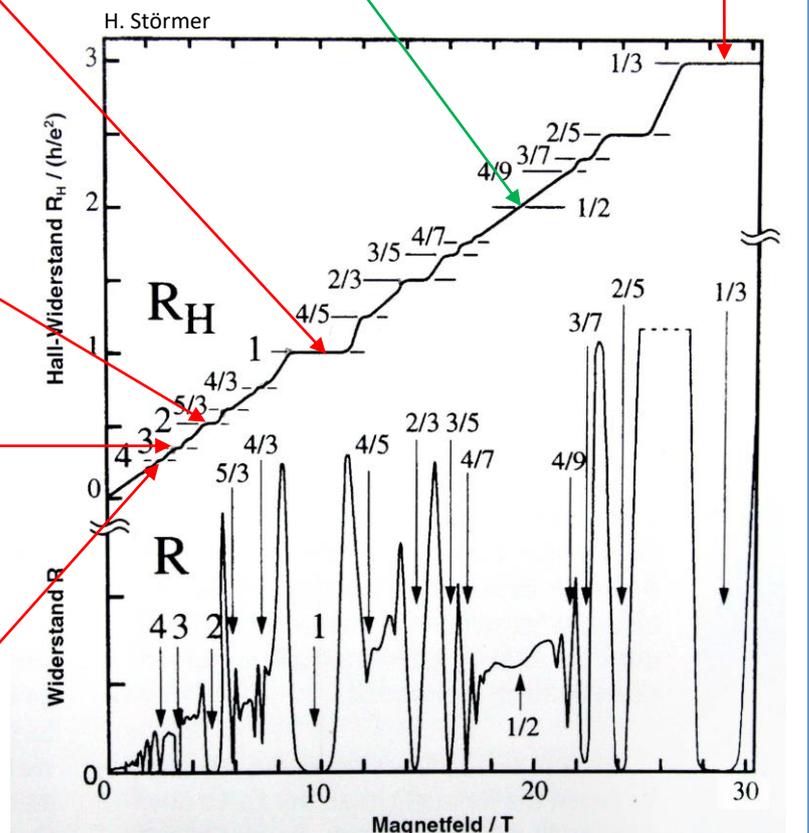
Teil 3

# Ein Torus-Modell für Quantenphänomene, dargestellt am Quanten-Hall-Effekt

Eine Exkursion zu den Gipfeln, Tälern und Plateaus des Quanten-Hall-Effektes



Die Plateaus entsprechen Frequenzverhältnissen, die stehende Wellen ermöglichen. Diese sind reproduzierbar mit Magnetfeldern B.



Nach De Broglie schwingen Elektronen auch im „Ruhezustand“ mit der Wellenlänge  $\lambda_{DB}$ . Eine Schraubenbahn entsteht bei Beschleunigung im E-Feld. Tritt ein zu E senkrecht Magnetfeld hinzu, wird die Schraubenachse zum Kreis gekrümmt. Bilden die Anzahlen der Umläufe beider Rotationen bestimmte Verhältnisse, bleibt das Elektron stabil auf seiner in sich geschlossenen Bahn auf einer Torus-Oberfläche mit der Gesamtkrümmung Null und trägt nichts mehr zur Hallspannung bei. Wächst B, verringert sich der Torusradius R (hier nicht dargestellt, s. Kap. 07).



Die Naturwissenschaften waren geboren. Bis heute sind diese in ihren Erklärungsmodellen noch immer weitgehend geprägt von Kugeln (Teilchen), die Wirkungen mit anderen Kugeln austauschen.

Eine gänzlich neue Erfahrung waren elektrische und magnetische Phänomene, die mit wellenartigen Erscheinungen einhergingen. Der Welle-Teilchen-Dualismus ist bis heute als jener Erklärungsversuch zu besichtigen, der jener starren Teilchenwelt eine schwingende „Wellenwelt“ hinzufügte und an die Stelle eines komplexen Naturverstehens eine abstrakte Berechnungsanleitung setzte, wie in dieser oder jener Experimentier-Situation zu rechnen ist.

Die Mathematik ist jener Teil des Fortschritts in der Naturbeschreibung, der riesige Datenmengen strukturieren kann und darin Ordnungsstrukturen zu erkennen bzw. zu bestätigen vermag, die auch die Natur bestimmen. Der andere Teil bleibt die Suche nach Verständnis der mathematischen mit den physischen Zusammenhängen in dieser hoch komplexen Natur, die das Unerwartete (Unverständene) eben doch mit allerlei List und Geduld als Element allgemeinerer Strukturen aufzeigt.

Spätestens seit dem (bisher erfolglosen) Bemühen, einen Fusionsreaktor auf elektro-magnetischer Basis zu bauen, rückt an die Stelle der etablierten Kugel- bzw. Teilchenvorstellung zur Naturerklärung wiederum eine bislang weitgehend übersehene geometrische Struktur: Nach eher statischen Objekten wie ebene Fläche und Kugel (Teilchen) tritt der TORUS als Vorstellungshilfe in den Vordergrund. Dies ist u.a. der natürlichen Tatsache geschuldet, dass die Torus-Oberfläche topologisch eine Gesamtkrümmung von Null hat und eine Transformation in eine Ebene zulässt, so dass z. B. rotierende Elektronen auf Schraubenbahnen, die zum Torus verbogen sind, unter bestimmten Bedingungen keinen Energieverlust haben, also strahlungsfrei sind. Geladene Teilchen lassen sich am Torus experimentell durch elektrische bzw. magnetische Felder von außen beeinflussen, so dass sehr präzise Messungen möglich sind, die Vermutungen bestätigen bzw. verwerfen können.

Mathematischer Hintergrund ist, dass die Torus-Oberfläche im Gegensatz zur Kugeloberfläche als „Landkarte“ in einer Ebene dargestellt werden kann, die einer Zahlenebene entspricht.

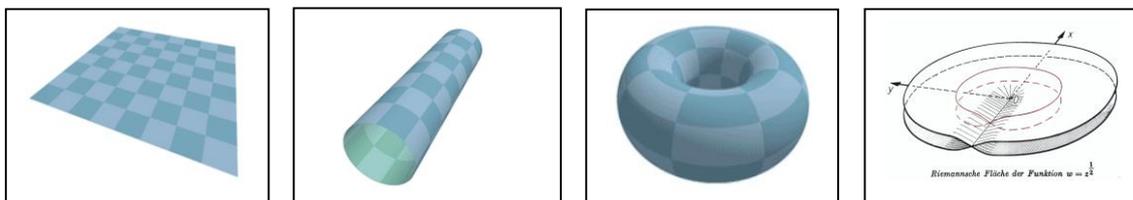


Bild 2

Jeder Punkt entspricht hier einer Zahl aus der Menge  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen. Eine solche komplexe Ebene  $\mathbb{C}$  ist die einfachste Riemannsche Fläche mit Eigenschaften, die über euklidisches Verständnis hinausgehen (z. B. Möbiusband). Mit einer solch „erweiterten“ mathematischen Struktur lassen sich dann auch physikalische Phänomene verstehen, die mit Euklid einfach „unsichtbar“ bleiben. So fallen beim Fraktalen Quanten-Hall-Effekt jene Zonen ohne Plateaus auf, die sich um Brüche mit geradzahligem Nenner (z. B.  $\frac{1}{2}$ ) gruppieren. Im Torusbild entspricht das einem Elektronenumlauf in der Basisebene des Torus, wobei das Elektron nur eine halbe Schwingung senkrecht dazu macht (es erreicht nach einer Drehung um  $180^\circ$  auf dem Meridian nicht den Startpunkt). Erst nach einem weiteren Umlauf in der Basisebene trifft es wieder am Startpunkt ein. Auch auf dem Möbiusband benötigt ein Punkt zwei Umläufe bis zur Rückkehr zum Startpunkt. An die Stelle einer „zweiseitigen Fläche“ (Euklid) ist eine „einseitige Fläche“ getreten, auf der etwas andere Regeln gelten und wo die gebrochene Zahl  $\frac{1}{2}$  eine besondere Rolle spielt (vergl. die „Riemannsche Vermutung“). Weil diese Riemannsche Vermutung bis heute noch keinen exakten Beweis gefunden hat, bedürfen auch alle Hypothesen bezüglich physikalischer Eigenschaften bewegter Elektronen auf der Torus-Oberfläche noch kritischer

Untersuchung. Denn ein wesentlicher Unterschied zwischen der komplexen Zahlenebene und der Torus-Oberfläche besteht ja darin, dass sich die Achsen der Zahlenebene in beide Richtungen grenzenlos erstrecken, aber Meridiane und Breitenkreise auf den gekrümmten Torus-Oberflächen in sich zurücklaufen (also prinzipiell endlich sind, so dass auch periodische Phänomene zu erwarten sind).

Klaus von Klitzing hat 1980 mit Hilfe eines tiefgekühlten zweidimensionalen Elektronengases systematisch den Hall-Effekt untersucht und charakteristische Plateaus entdeckt.

Die besondere Leistung bestand in der Schaffung einer Experimentieranordnung, in der die De Broglie Wellenlänge der bewegten Elektronen groß genug ist, um in der Größenordnung der von Magnetfeldern bewirkten Bahnkrümmung zu liegen. Da einerseits  $\lambda_{DB} \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$  und damit bei kleinsten Temperaturen im Millikelvin-Bereich die größten De Broglie Wellenlängen möglich sind, mussten andererseits durch starke Magnetfelder kleinstmögliche Krümmungsradien realisiert werden. Damit war die Voraussetzung gleicher Größenordnung erfüllt. Die Frequenz der (elektrisch bewirkten) Teilchenschwingungen trat jetzt offenbar in Wechselwirkung mit der Umlauf-Frequenz der mittels Magnetfeldern auf Mikro-Kreisbahnen gezwungenen Elektronen. Das Elektron führte jetzt zeitgleich zwei senkrecht zueinander stehende Rotationen auf einer Torus-Oberfläche aus, so dass Phänomene wie bei stehenden Wellen zu erwarten waren.

**Mit der technisch realisierten Verkleinerung makroskopischer Kreisbahnen bis in den Mikrobereich hinein (durch starke Magnetfelder) bei gleichzeitiger Vergrößerung der Mikrostruktur (schwache elektrische Felder bei Tiefsttemperaturen), wurden so bislang unbekannte Wechselwirkungen bei Quantenobjekten sichtbar (Plateaus), die zum Verständnis der Quantenphänomene beitragen.**

Beim ersten von Edwin Hall 1879 beobachteten Effekt, wo ein vom Magnetfeld durchsetztes Metallblättchen im Stromkreis auch einen „Querstrom“ bzw. eine (Hall-) Spannung liefert, zeigte sich mit wachsendem Magnetfeld ein linearer Anstieg von  $U_H \sim B$ . Mathematisch handelte es sich um eine lineare Funktion, die einen proportionalen Zusammenhang in der Natur darzustellen vermag.

Schaut man auf die vielen Gipfel, Täler und Plateaus im Diagramm eines Quanten-Hall-Experiments, so wird sofort klar, dass zum Verständnis hier

- (1.) ein anderer Denkansatz und
  - (2.) ein anderes mathematisches Handwerkszeug gebraucht werden,
- um ganz andere, komplexere Phänomene adäquat zu beschreiben.

#### Zu (1.) **Denkansatz**

Wenn Quanten-Phänomene vergleichbar wie Schwingungs- bzw. Wellenphänomene erscheinen und die Gesetze zur Beschreibung bei Makro-Phänomenen bekannt sind, so ist es naheliegend nachzusehen, inwiefern diese Gesetze auch in der Mikrowelt gelten. Hier gilt die Aufmerksamkeit insbesondere dem geladenen Elektron, dessen Bewegung eine Doppelschwingung darstellen kann, die von zwei unabhängigen Kräften (elektrisch und magnetisch) verursacht wird. Damit werden Strukturen ermöglicht, die stehenden Wellen entsprechen – makroskopischen Phänomenen also, die seit langem bekannt und gut untersucht sind.

#### Zu (2.) **Mathematisches Handwerkszeug**

Wenn sich herausstellt, dass statt einfacher linearer Zusammenhänge hier gekoppelte Rotationen und damit möglicherweise stehende Wellen im Spiel sind, so ist zur Beschreibung nach entsprechendem Handwerkszeug zu suchen. Es wird die Idee getestet, inwiefern ein Torus-Modell das leisten kann.

## 02 Das abstrakte Torus-Modell zur Visualisierung von Quantenphänomenen

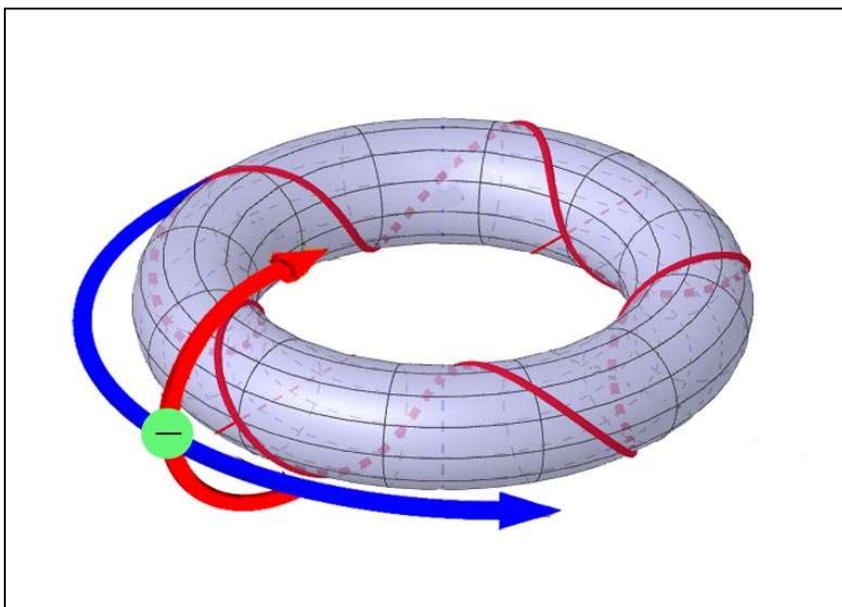
Sinnliche Anschauung *und* abstrakte Strukturierung sind zwei unzertrennliche Seiten derselben Medaille namens *Verständnis*.

Ein Naturphänomen gilt als verstanden, wenn es eine abstrakte Struktur gibt, die prinzipiell physisch realisiert werden könnte – und umgekehrt.

Als um 1900 die Physiker tiefer in die Mikrowelt einzudringen begannen, stießen sie immer wieder auf das Phänomen von ausgezeichneten stabilen Zuständen, die nicht ins Weltbild kontinuierlicher Veränderungen passte. Dabei findet man auch in der Makrowelt solche diskontinuierlichen Sprünge, wie sie z. B. bei stehenden Wellen auftreten: Durch Überlagerung zweier Wellen kommt es unter bestimmten Bedingungen zu räumlich und zeitlich stabilen Strukturen, die reproduzierbar und damit gut erklärbar sind. Sollten nicht auch die neu entdeckten Quanteneffekte als Überlagerungen von Wellen aufgefasst werden können? Hier war wohl zunächst das Teilchenmodell hinderlich, aber De Broglie nutzte die neuen Freiheiten der modernen Axiomatik, die „willkürliche“ Axiome erlaubte, wenn diese sich zur Konstruktion widerspruchsfreier Gedanken-Gebäude nutzen ließen. Bis heute basiert die Erklärung von Quantenphänomenen zwar u. a. auf der De Broglie'schen Hypothese, nach der Teilchen sich als Wellen ausbreiten und entsprechende Wellenphänomene hervorbringen, doch „Materiewellen“ bzw. „De-Broglie-Wellenlängen“ sind zwar exakt berechenbar, aber welcher messbaren Länge entsprechen diese Werte? Wo ist der physische Zusammenhang zwischen Welle und Teilchen? Erst wenn dem Teilchen nicht nur eine Welle *zugeordnet* wird, sondern es als tatsächlich physisch schwingendes Objekt erkannt und behandelt wird, sollten sich die Quantenphänomene zwanglos in die Physik einordnen lassen.

Zum Verständnis von Quantenphänomenen soll hier das Torus-Modell getestet werden, weil es geeignet erscheint ein Elektron zu beschreiben, das gleichzeitig in zwei orthogonal zueinander stehenden Richtungen zu schwingen vermag:

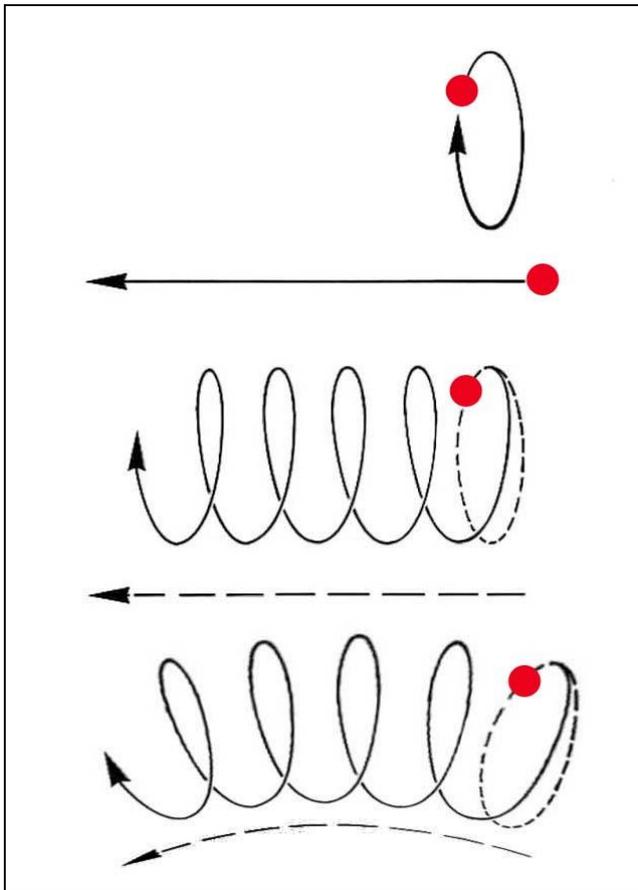
- Rotation Richtung Meridian des Torus (Krümmung wird von E-Feld bewirkt, roter Pfeil)
- Rotation Richtung Breitenkreis des Torus (Krümmung wird von B-Feld bewirkt, blauer Pfeil)
- Die Überlagerung ergibt ggf. eine geschlossene Schraubenbahn (rot) auf einer Torus-Oberfläche.



*Bild 3. Das Torus-Modell wird hier hinsichtlich seiner Brauchbarkeit für Quantenphänomene zunächst am Beispiel des Quanten-Hall-Effektes getestet. Ursache dieser Auswahl ist, dass hier eine einzige veränderliche Größe  $B$  zu vielerlei Phänomenen bzw. Änderungen physikalischer Größen führt, die jeweils einer reproduzierbaren Torus-Struktur zugeordnet werden können.*

### 03 Rotation → Translation → Schraube → Rotation der Schraube → Torus

Bild 4 a, b, c

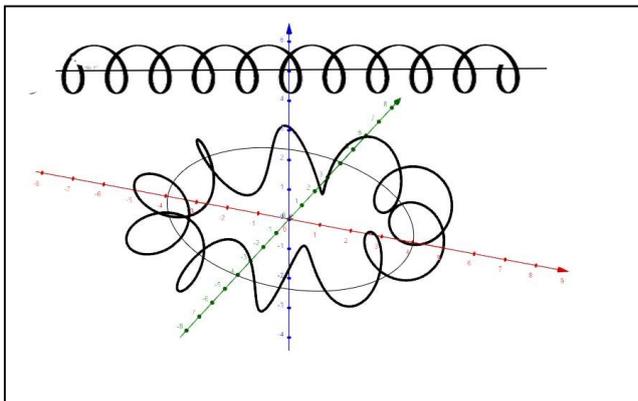


1. Jeder Körper existiert nur oberhalb des absoluten Temperatur-Nullpunktes und führt eine Wärmebewegung aus. Auch Elektronen „in Ruhe“ schwingen.

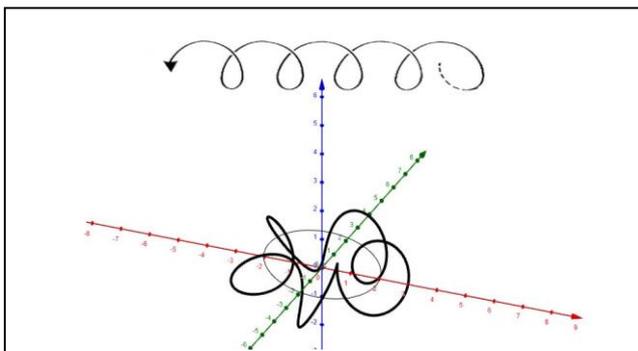
2. Nach Beschleunigung im elektrischen Feld tritt eine Translationsbewegung hinzu.

3. Die Überlagerung von Rotation und Translation führt zu einer Schraubenbewegung, die nach Abschalten des elektrischen Feldes mit konstantem Betrag der Bahngeschwindigkeit bei gleichem Bahnradius erfolgt (alle Störungen sollen ausgeschlossen sein).

4. Wirkt ein Magnetfeld senkrecht zur Translationsrichtung, so wirkt eine Lorentzkraft. Diese lenkt das mit  $r = \text{konst.}$  kreisende Elektron auf eine Torusbahn mit Radius  $R$ , ohne dessen Geschwindigkeitsbetrag zu ändern.



5. Unter bestimmten Bedingungen (geringste Temperaturen nahe 0 K, sehr große Magnetfeldstärken, sehr kleine Längsspannung im Milli-Volt-Bereich) wird die geradlinige Achse der Schraubenbahn des Elektrons so stark gekrümmt, dass diese als winziger Kreis innerhalb der Probe des (fast) störfreien zweidimensionalen Elektronengases verbleibt. Die Ladungsträger erreichen weder die Anode des Längsstromes noch die des Querstromes, so dass weder ein Längs- noch ein Querstrom fließt. Die Hallspannung stagniert deshalb bei bestimmten Magnetfeldstärken innerhalb gewisser Grenzen auf bestimmten Plateaus.



6. Die beiden orthogonalen Rotationen können dabei stehende Wellen bilden, die bei bestimmten rationalen Frequenzverhältnissen zu stabilen Strukturen führen.

## 04 Begriffe zur Beschreibung der Teilchenbewegung:

### Erweiterung von eindimensionaler zu mehrdimensionaler Betrachtung

#### Zum Verständnis der De-Broglie-Wellenlänge

In Lehrbüchern bietet man folgende Erklärung an:

Die De-Broglie-Wellenlänge ist eine Übertragung der Eigenschaften von Photonen auf Objekte mit Ruhemasse, z.B. Elektronen.

Die de-Broglie-Wellenlänge für Elektronen wird berechnet mit  $\lambda_{DB} = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{m_e v_e}$ .

Die Idee, bekannte physikalische Strukturen der masselosen Photonen auf Teilchen mit Masse (z. B. Elektronen) zu übertragen, hat jeder experimentellen Überprüfung Stand gehalten, so dass sicher damit gerechnet werden kann. Der Mathematiker ist zufrieden, der Physiker nicht. Ihm fehlt der Bezug zur physischen Realität, denn er möchte wissen, **welcher messbaren (physischen) Länge in der Natur diese De-Broglie-Wellenlänge entspricht.**

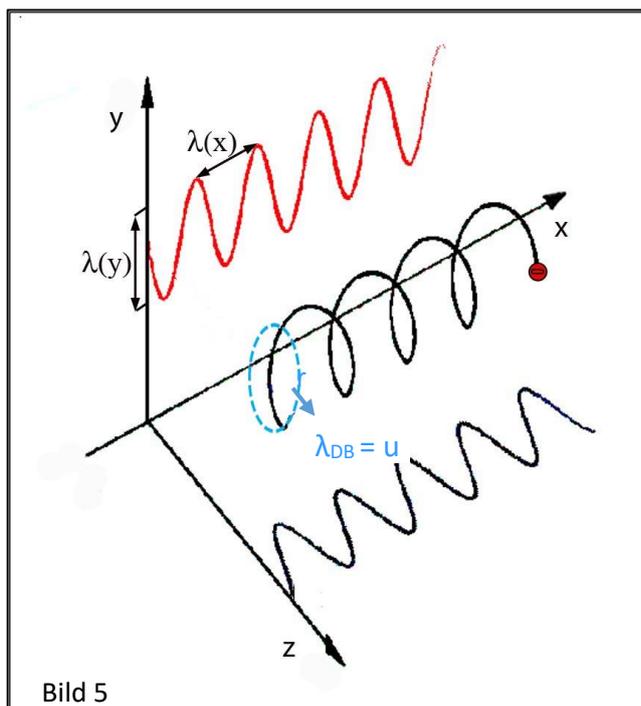
Die experimentell bestätigte Gleichung  $\lambda_{DB} = \frac{h}{m_e v_e}$  kann weiterhelfen, denn sie verweist auf den Zusammenhang  $\lambda_{DB} \sim \frac{1}{v_e}$ , d. h. die Wellenlänge  $\lambda_{DB}$  verringert sich mit wachsendem Betrag der Elektronengeschwindigkeit. Da bei hohen Elektronengeschwindigkeiten experimentell auch kleinere Bahnradien gemessen werden, erscheint folgendes Modell plausibel:

Die De-Broglie-Wellenlänge (Bild 5) entspricht dem Umfang  $u = 2\pi r$  eines rotierenden d. h. schwingenden Elektrons „in Ruhe“ (blaue Kreis-Bahn) bzw. auf einer Schrauben-Bahn (schwarz) mit kleiner Geschwindigkeit (mit vernachlässigbarer Steighöhe  $h$  bei kleinen Beschleunigungsspannungen).

[Jede größere Geschwindigkeitsänderung bei einigen Kilo-Volt Beschleunigungsspannung in x-Richtung bewirkt eine Wellenlängenänderung und damit eine Radiusänderung.

Bei hohen Translationsgeschwindigkeiten erscheint die Schraubenbahn gedehnt und verändert dabei ihre Geometrie (Verringerung des Radius), so dass ein zusätzlicher Korrekturfaktor eingefügt werden

muss, um die Gleichung anzupassen:  $\lambda_{DB} = k \cdot \frac{h}{m_e v_e}$  mit  $k = \sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}$ . Dieser Fall ist beim QHE mit seinen geringen Spannungen nicht zu berücksichtigen.



Da die geringe Beschleunigungsspannung  $U_{längs}$  konstant gehalten wird, bleiben Radius und Umfang der Schraubenbahn des Elektrons während eines Quanten-Hall-Experiments unverändert. Damit ist auch die De-Broglie-Wellenlänge  $\lambda_{DB}$  des Elektrons bei  $U_{längs}$  bekannt:

$$eU_{längs} = \frac{1}{2} m_e v_e^2, \quad v_e = \sqrt{\frac{2eU_{längs}}{m_e}}$$

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{m_e v_e}$$

Durch Einsetzen von  $\lambda_{DB} = u = 2\pi r$  wird ein Erhaltungssatz deutlich:

$$h = 2\pi r \cdot m_e v_e \quad | :2\pi$$

$$\hbar = m_e r v_e$$

Die reduzierte Planck-Konstante  $\hbar$  entspricht hier einem Bahndrehimpuls, der bei wachsendem Geschwindigkeitsbetrag  $v_e$  für eine Verringerung des Radius  $r$  sorgt.

## Komponentenzerlegung physikalischer Größen

All diese Überlegungen lassen unberücksichtigt, dass bei  $U_{\text{längs}} = 0$  auch die Elektronengeschwindigkeit  $v_e$  in x-Richtung Null ist, so dass  $\lambda_{DB} = \frac{h}{m_e v_e}$  gegen unendlich streben würde. Beobachtet wird aber, dass ein „ruhendes“ Elektron (ohne Energiezufuhr) vibriert bzw. messbar schwingt und eine konstante Bahngeschwindigkeit  $v_e$  haben muss, so dass auch  $\lambda_{DB}$  für diesen Fall eine konstante Größe ist. Das Problem löst sich auf, wenn wir das schwingende Elektron im 3D-Raum betrachten und seine Schwingung in Komponenten zerlegen: Es zeigt sich, **dass  $v_e$  oft nur die x-Komponente berücksichtigt**, wobei andere Bewegungskomponenten bei einer tatsächlichen Kreis- bzw. Schraubenbahn des Elektrons ausgeblendet werden. Gehen wir von der linearen Punktbewegung des Elektrons zu einer Betrachtung seiner tatsächlichen 3D-Bewegung im Raum über, so stellt sich das „ruhende“ Elektron als Elementarobjekt dar, das mit Frequenz  $f$ , Wellenlänge  $\lambda_{DB}$  und dem Betrag der Bahngeschwindigkeit  $v_B$  schwingt bzw. (modellhaft) auf einer Kreisbahn rotiert.

Selbst bei Energiezufuhr senkrecht zur Rotationsebene bleibt der Betrag der Bahngeschwindigkeit des Elektrons auf der nunmehr zur Schraube geformten Bahn erhalten, denn das senkrecht stehende elektrische Feld vermag zwar die Richtung, nicht aber den Betrag der Geschwindigkeit  $v_B$  zu ändern.

Arnold Sommerfeld hat 1921 in [3] den damaligen Wissensstand zusammengefasst mit  $\alpha = \frac{v_1}{c}$ .

Das Verhältnis der Bahngeschwindigkeit eines Elektrons im Grundzustand  $v_1$  ( $v_B$ ) zur Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist eine Konstante (Feinstrukturkonstante  $\alpha$ ).

Damit muss auch  $v_1$  ( $v_B$ ) eine Konstante sein mit  $v_1 = 2187691,264 \text{ m/s}$ . Auch der Radius der Kreisbahn im Grundzustand ist eine Konstante (Bohrscher Radius) mit  $r_1 = 5,29177210903 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ . Daraus ergibt sich für die De-Broglie-Wellenlänge im Grundzustand die Länge einer Kreisbahn bei einem Umlauf:  $\lambda_{DB} = u_1 = 2\pi \cdot r_1 = 3,324918476 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

Mit diesen Überlegungen lässt sich die De-Broglie-Wellenlänge im Grundzustand als Länge einer Schraubenbahnkurve (für  $U = 0$  Kreisbahn) für eine Periode auffassen.

Sommerfeld benutzte das Bohrsche Atommodell für seine Ableitungen zur Feinstrukturkonstanten und ging von zwei verschiedenen Arten von Bedingungen aus:

1. Die klassische Bedingung fordert die Existenz einer Coulomb-Kraft zwischen zwei entgegengesetzten Ladungen (Elektron, Proton), um die Trägheitskräfte zu kompensieren.
2. Die quantenmechanische Bedingung  $m_e r^2 \omega = \frac{nh}{2\pi}$  lässt nur ganzzahlige Vielfache einer Grundgröße zu.

Der Quanten-Hall-Effekt beschreibt ebenfalls die Bedingungen, unter denen bestimmte Bahnen des Elektrons zustande kommen. Die Besonderheit ist, dass hier

- a) keine Coulomb-Kräfte die Trägheitskräfte kompensieren, sondern externe Magnetfelder in Wechselwirkung mit den elektrischen Ladungen der Elektronen treten, wobei Lorentzkräfte wirken und
- b) dadurch auch bestimmte gebrochene Vielfache einer Grundgröße (Klitzing-Widerstand  $R_K$ ) zugelassen sind.

Damit wird die Beschreibung der Phänomene („ansteigende Kurve wird von Plateaus unterbrochen“) nicht an zwei ganzzahlige Ladungen gebunden. Das kontinuierlich wachsende Magnetfeld erzeugt dennoch **Quantenphänomene, die jetzt als Ergebnis verschiedener Frequenzverhältnisse interpretiert werden können**. Die bei einer festen Längsspannung vorgegebene Bewegung (Translation in x-Richtung und Rotation des Elektrons um Translationsbahn-Achse) wird im Magnetfeld durch Lorentzkräfte beeinflusst: Die Translationsbahn geht in eine weitere (zusätzliche) Rotation über. Bei bestimmten Frequenzverhältnissen bilden sich zwischen beiden Rotationen stehende Wellen aus, die ohne Energiezufuhr bzw. -abgabe stabile Regime aufbauen, die auch in gewissen Grenzen Störungen (z.B. Änderungen des B-Feldes) kompensieren können.

Die Zerlegung der räumlichen Bahnkurve ist verbunden mit einer präzisen Bezeichnung der einzelnen Komponenten. Es ist jetzt zu unterscheiden zwischen eigentlicher „Bahngeschwindigkeit  $v_B$ “ auf der gekrümmten 3D-Schraubenbahn und deren Projektion auf die x-y-Ebene („ $v_{\text{trans}}$  in x-Richtung“) bzw. auf die y-z-Ebene („ $v_{\text{rot}}$  als Kreisbewegung“). Entsprechend sind die Wellenlängen zu unterscheiden. Die De-Broglie-Wellenlänge  $\lambda_{\text{DB}}$  entspricht der abgewickelten Schraubenbahnlänge für einen Umlauf,  $\lambda_{\text{trans}}$  ist die Länge x der Bahnprojektion auf die x-y-Ebene (bzw. auf die x-Achse) und  $\lambda_{\text{rot}}$  die Länge y der Projektion (Kreis) in die y-z-Ebene (bzw. auf die y-Achse).

Es wird zu testen sein, wie tragfähig dieses Konzept bei der Erklärung von Phänomenen bei „langsamen“ Elektronen ist (Beschleunigungsspannungen im Millivolt-Bereich, z. B. QHE) und ob es auch Phänomene bei „sehr schnellen“ Teilchen wie das Myonen-Paradoxon zu erklären vermag (Beschleunigungen bis in die Nähe von c).

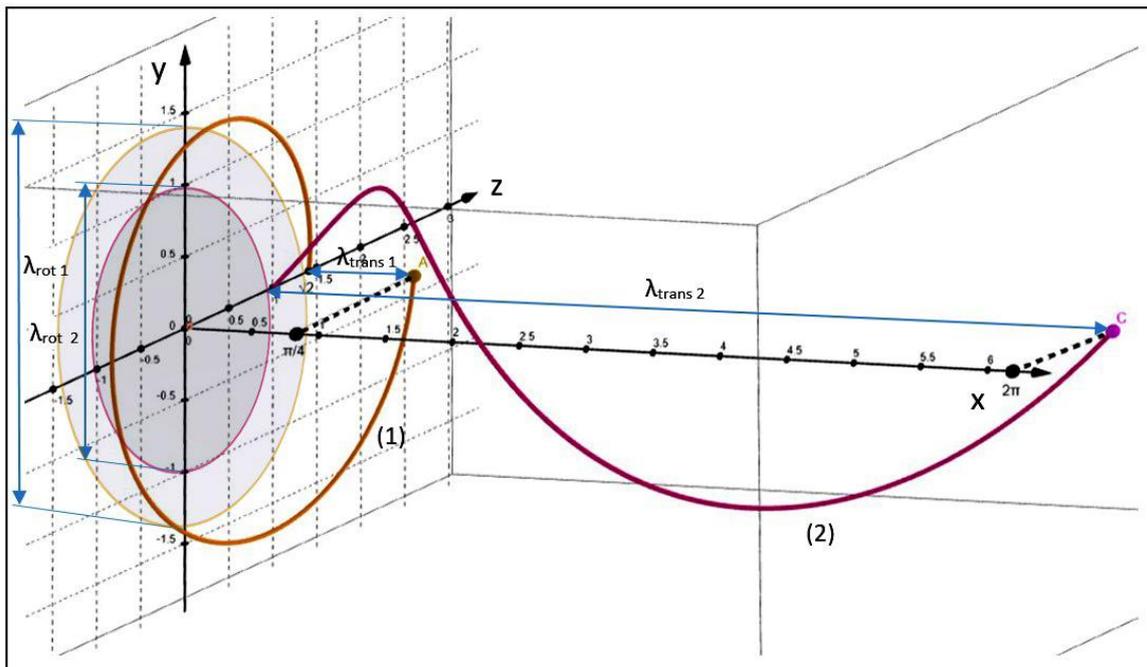


Bild 6

Die Grafik zeigt den Unterschied der zu erwartenden Phänomene für „langsame“ Elektronen-Bewegungen in x-Richtung (1) wie sie beim Quanten-Hall-Effekt typisch sind und „schnelle“ Bewegungen (2) in x-Richtung, wobei die tatsächlichen Geschwindigkeitsbeträge  $v_B$  auf den beiden farbigen Bahnen hier gleich groß sind. Es werden dort jeweils gleiche (verschieden gekrümmte) Wege in gleichen Zeiten zurück gelegt, aber eben nicht in die gleichen Richtungen: Die Geschwindigkeitsvektoren sind nicht identisch. Es handelt sich letztlich nicht um gleiche Geschwindigkeiten in x-Richtung trotz gleicher Beträge von  $v_{B1}$  und  $v_{B2}$ .

Beim Quanten-Hall-Effekt haben wir es mit „langsamen“ Elektronen zu tun, die trotz linearer Magnetfeldänderungen überraschend Quanteneffekte hervorrufen. Kosmische Myonen hingegen sind „sehr schnelle“ Teilchen, deren erwartete Lebenszeit bis zum Zerfall überraschend weit überschritten zu werden scheint. Beide so unterschiedlichen Effekte lassen sich verstehen, wenn die Teilchenbewegung statt eindimensional wegen ihrer realen Komplexität in Komponenten zerlegt und mehrdimensional beschrieben wird.

## 05 Extreme Bedingungen beim Quanten-Hall-Experiment

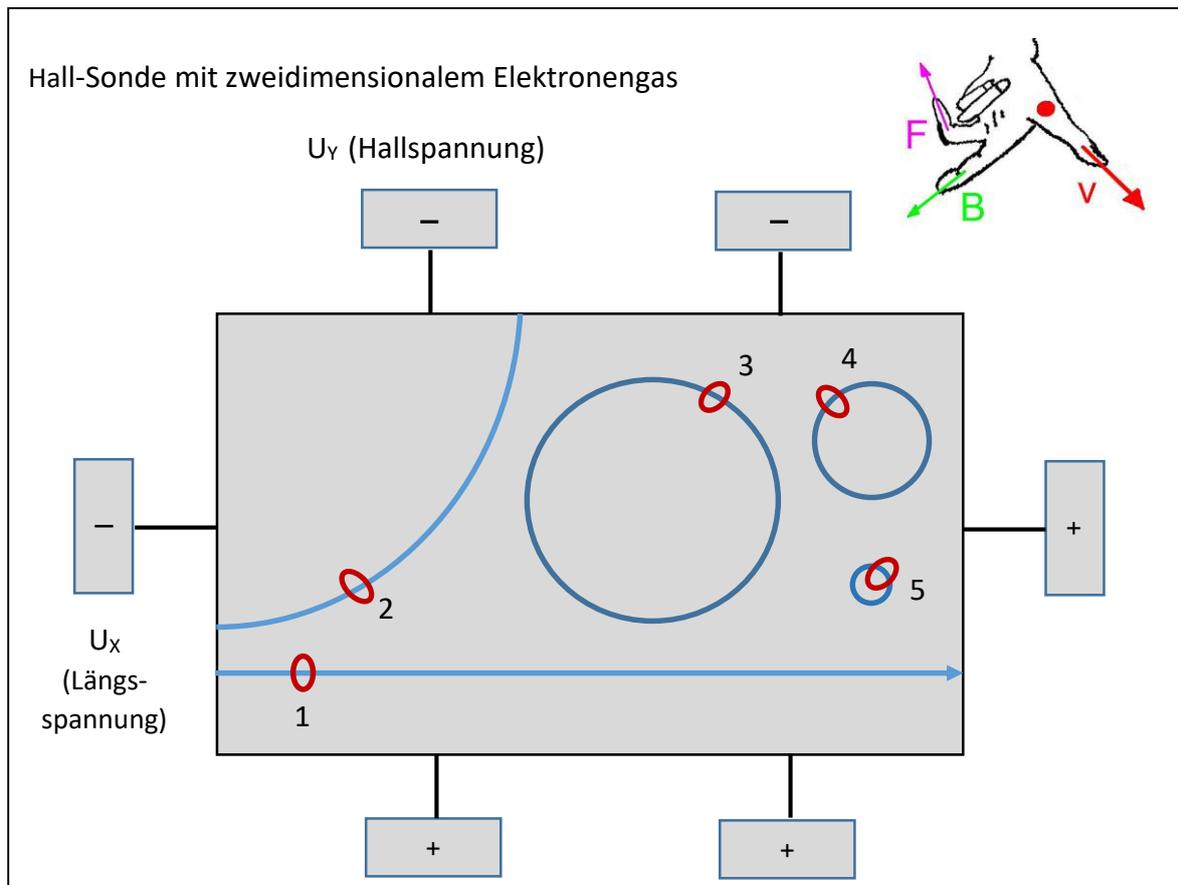
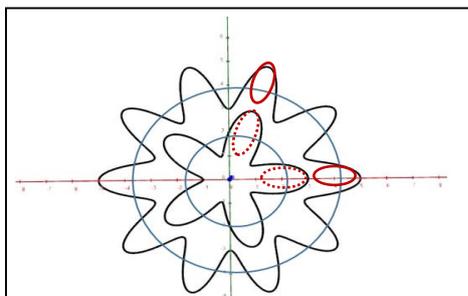


Bild 7



### Beispiel $T_{1,5}$ und $T_{1,10}$

1 Umlauf in der x-y-Ebene entspricht 10 (bzw. 5) Umläufen senkrecht dazu: Es sind bestimmte Frequenzen je zweier orthogonaler Schwingungen, die zu stehenden Wellen auf Torus-Oberflächen führen. Wächst  $B$ , verringern sich die Radien der Torus-Achsen „sprunghaft“ bei Verringerung der Umlauffrequenz. Die Radien der orthogonalen Meridian-Rotationen (rot) bleiben bei  $U_x = \text{konst.}$  unverändert.

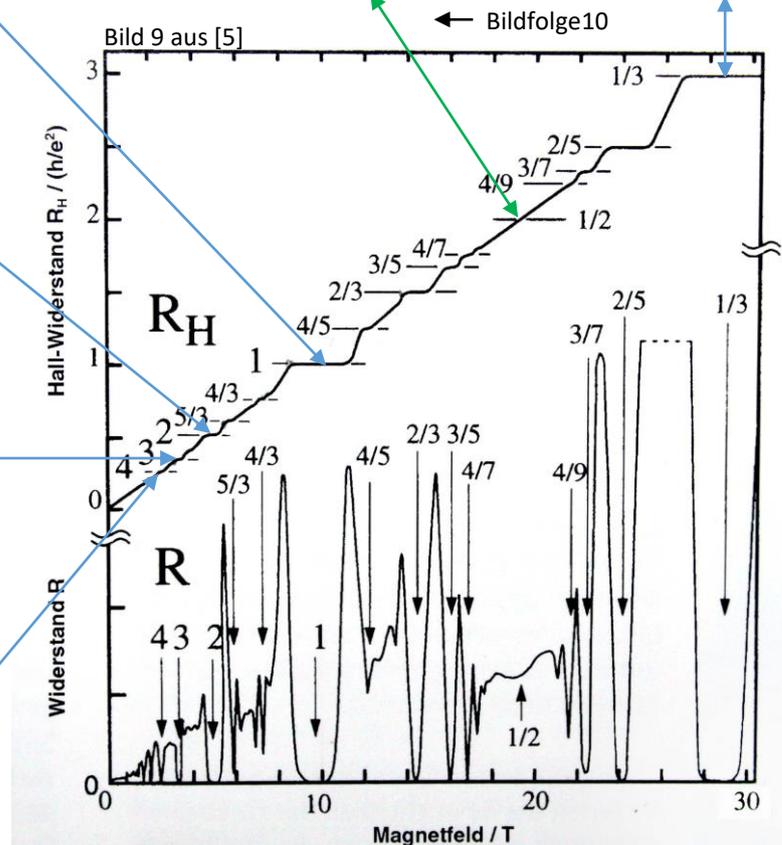
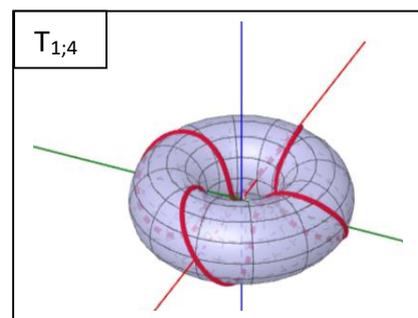
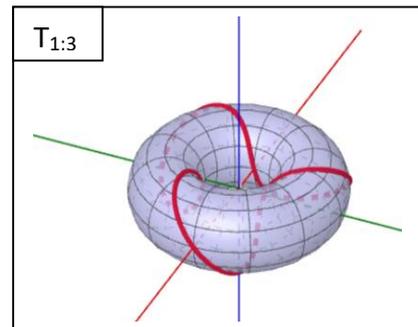
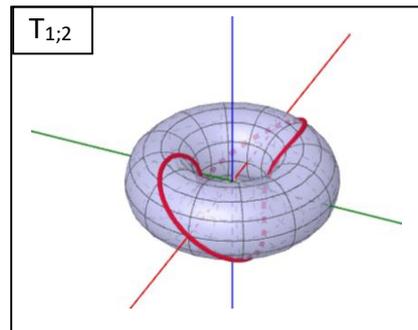
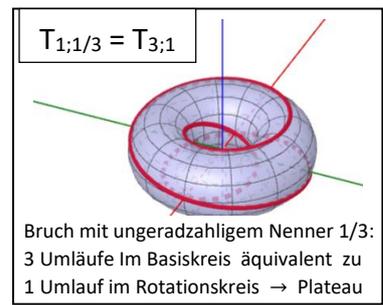
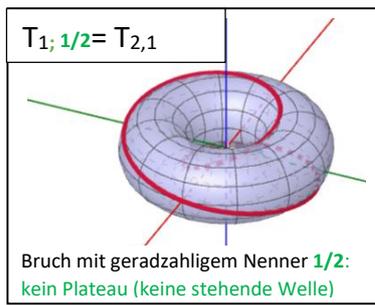
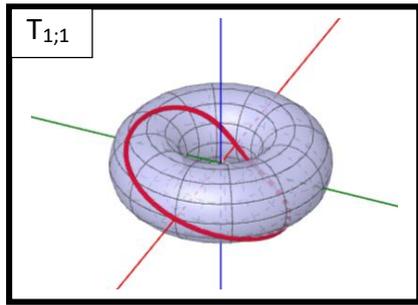
Bild 8.

Die Sonde zur Messung des Quantenhalfeffektes muss folgende Bedingungen erfüllen:

1. Das Leitermaterial ist extrem dünn (zweidimensionales Elektronengas 2DEG, wenige Atomlagen).
2. Die Sonde wird extrem tief gekühlt.
3. Bei konstant (geringer) Längsspannung müssen hohe Magnetfeldstärken zur Verfügung stehen.

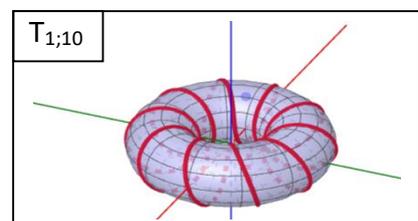
Solche Extrembedingungen ermöglichen es, dass klassische Größen wie Bahnradien (Bild 7, blau) so extrem klein werden, dass sie in die Größenordnungen der Mikrowelt gelangen (s. Elektron Nr. 5). Hier können jetzt Umlauffrequenzen auf Torus-Breitengraden mit Hilfe von Magnetfeldstärken so eingestellt werden, dass sie mit den konstanten Umlauffrequenzen des rotierenden Elektrons auf Meridianen (bei  $U_x = \text{konst.}$ , rote Bahn) bestimmte Verhältnisse bilden. Es zeigen sich dabei innerhalb des extrem dünnen Sonden-Raumes autonome 3D-Strukturen, die topologisch einem Torus äquivalent sind. Damit gibt es einen Zugang zur geometrischen Interpretation der Messergebnisse.

# 06 Erklärung der Stabilität bewegter Elektronen im Magnetfeld: Wie kommen Plateaus und ihre Reproduzierbarkeit beim Quanten-Hall-Effekt zustande?

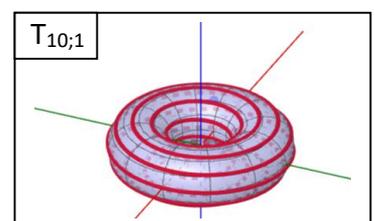


Die Plateaus entsprechen Frequenzverhältnissen (Torusknoten  $T_{p;q}$ ), die stabile stehende Wellen ermöglichen. Diese Zustände sind reproduzierbar mit Magnetfeldern B.

Akzeptiert man De Broglies Einsicht, dass Elektronen auch im „Ruhezustand“ schwingen, muss ihre Rotation vom Umfang  $\lambda_{DB}$  sein. Eine Schraube entsteht bei Beschleunigung im E-Feld. Tritt ein orthogonales Magnetfeld hinzu, wird die gerade Schraubenbahnachse zum Kreis um eine Torusachse. Bilden die Anzahlen der Umläufe beider Rotationen ganzzahlige Verhältnisse zueinander, bleibt das Elektron stabil auf seiner Bahn auf der Torusoberfläche mit der Gesamtkrümmung Null und trägt nichts mehr zur Hallspannung bei. Beachte: Bei konst. Längsspannung sind die Radien der Rotationskreise (Meridiane) alle gleich lang (korrekt dargestellt). Die Torus-Radien in der Basisebene senkrecht zur Achse hingegen werden mit wachsendem Magnetfeld kleiner (siehe Kap.77).

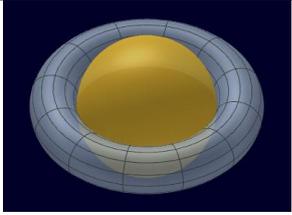
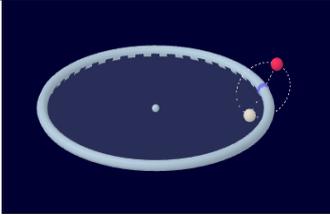
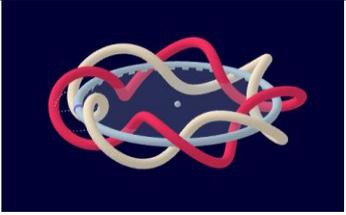
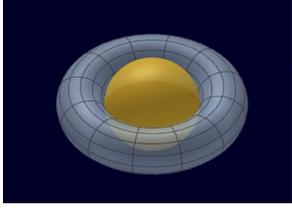
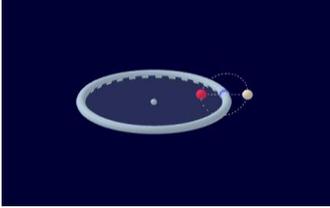
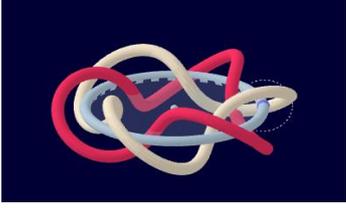
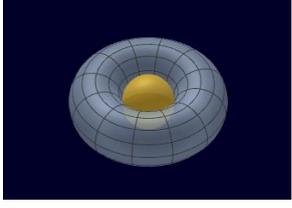
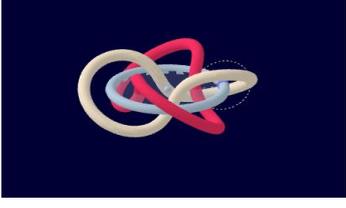
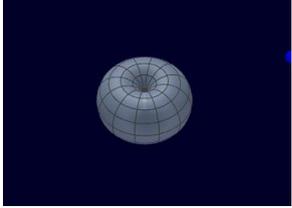
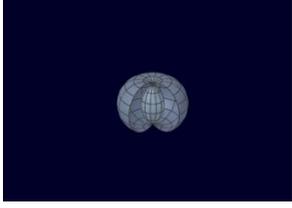
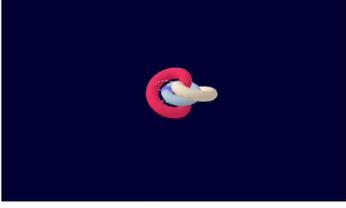
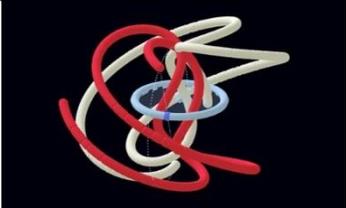


$T_{1;10} \sim T_{10;1}$   
 $T_{p;q} \sim T_{q;p}$   
**Die Torusknoten**  
 $T_{p;q}$  und  $T_{q;p}$  sind topologisch äquivalent zueinander.



## 07 Elektronenbewegung beim Quanten-Hall-Effekt im Torus-Modell

Im Magnetfeld wird eine geradlinige Achse der Elektronen-Schraubenbahn zur Kreisbahn gekrümmt. Die abgebildeten möglichen Torus-Strukturen sind das Ergebnis der Bewegung eines einzigen Punktes auf einer gedachten Torus-Oberfläche, die ggf. periodisch wiederholt wird und damit ein stabiles räumliches Gebilde „vortäuscht“. Die Energie des Magnetfeldes „verbiegt“ zwar die Elektronen-Schraubenbahn zum Kreis mit Radius  $R$ , ändert aber nicht den Geschwindigkeitsbetrag von  $v$  und den Meridianradius  $r$ . Die entstehenden Strukturen lassen sich als stehende Wellen im Mikrobereich beschreiben.

Radien	B-Feld	Torus-Radien $R$ bei $r = 1$ (konst.)	Zwei Rotationen überlagern einander	Der rote Punkt erzeugt eine stehende Welle
$R = 4$ $r = 1$	$B_1$			
$R = 3$ $r = 1$	$B_2 > B_1$			
$R = 2$ $r = 1$	$B_3 > B_2$			
$R = 1$ $r = 1$	$B_4 > B_3$			
$R = \frac{1}{2}$ $r = 1$ Stehende Wellen nur bei ungeraden Nennern für $R < 1$	$B_5 > B_4$			 <b>Keine stehende Welle</b>
$R \rightarrow 0$ $r = 1$	$B_n \rightarrow \infty$	 Torus geht in Kugel über		 Irreguläre Bahnen z.B. bei irrationalen Zahlen, <b>keine stehende Welle</b> möglich

Erstellt mit GeoGebra-Apps des Autors Georg Wengler

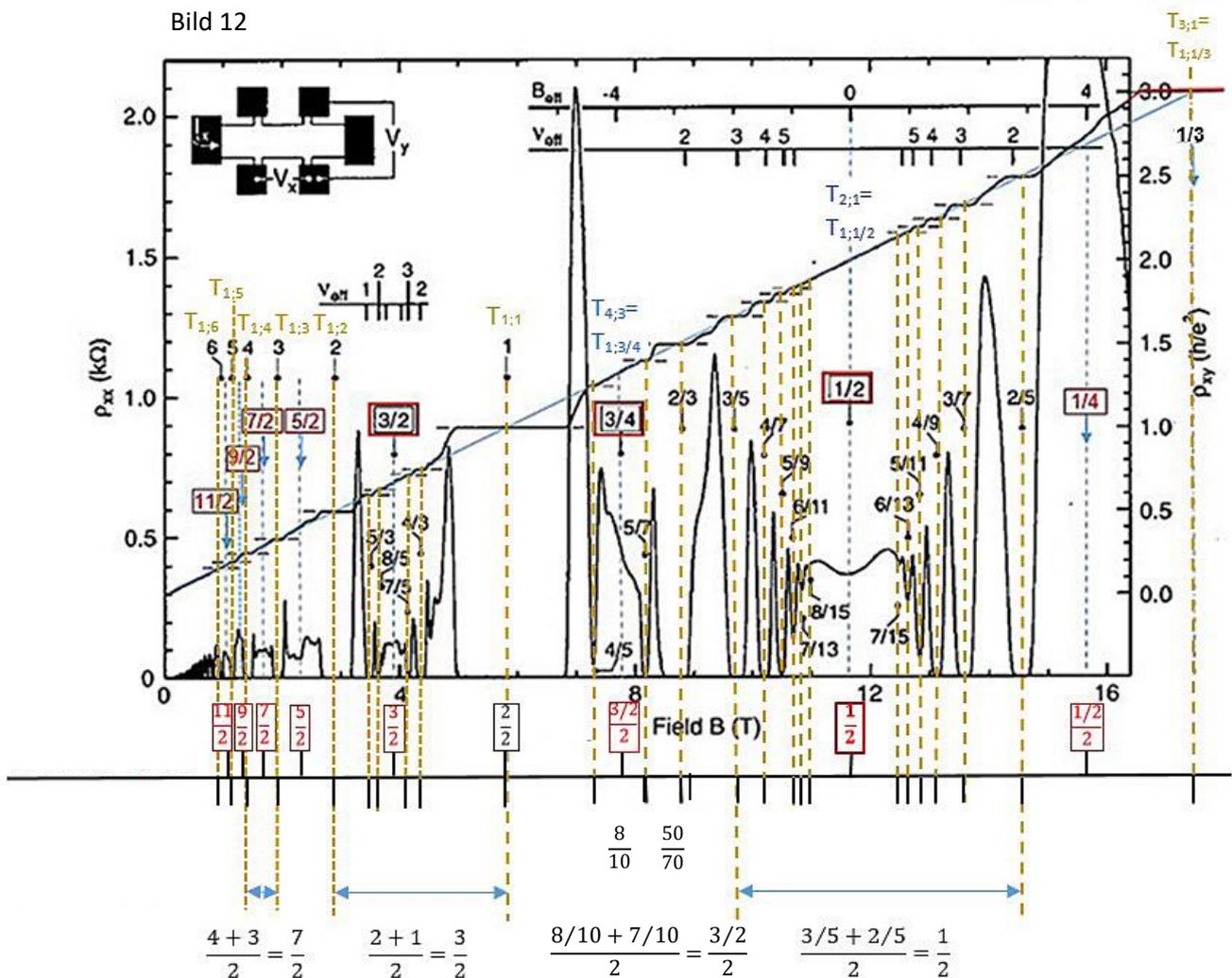
## 08 Interpretation eines Diagramms zum Quanten-Hall-Effekt

Das Diagramm führt Messdaten in ihrem Bezug aufeinander so zusammen, dass allgemeine physikalische Zusammenhänge deutlich hervortreten. Bei konstantem Längsstrom und veränderlichem Magnetfeld entsteht zwar eine komplizierte Messkurve, die aber mit dem Torus-Modell zu klassisch beschreibbaren Phänomenen (stehenden Wellen) hinführen. Zur Kennzeichnung einzelner Kurvenpunkte werden Torusknoten  $T_{p,q}$  benutzt, die das Frequenzverhältnis  $p:q$  mit  $p$  (Umlauffrequenz auf Breitengrad) und  $q$  (Umlauffrequenz in Meridianrichtung) markiert. Solcher Torusknoten entspricht damit einer dimensionslosen (Verhältnis-)Zahl.

Dem Original-Diagramm (Kasten) wurden vom Autor farbige Ergänzungen hinzugefügt.

1. Die Originalzeichnung (Kasten) enthält die linear ansteigende Messkurve für den Halleffekt mit Plateaus. Die durchgehende blaue Linie deutet den Kurvenverlauf ohne Plateaus beim Halleffekt an.

Bild 12



2. Darunter ist der unregelmäßige Verlauf des Längsstromes (original, schwarz) mit brauner Zuordnung der Stromzusammenbrüche beim jeweiligen Plateau dargestellt (gestrichelte Senkrechte zur Plateaumitte).

3. Ausgewählte Abschnitte konstanten Anstiegs sind mittig mit blauer Linie mit dem zugehörigen B-Wert der Magnetfeldstärke verbunden. Ihnen sind die Zahlen in den roten Kästen zugeordnet. Es handelt sich um bestimmte Vielfache von  $\frac{1}{2}$ , bei denen keine Plateaus auftreten.

4. Die Magnetfeldstärken können Werte annehmen, die eine Schraubenbahn (bzw. deren Achse) des Elektrons zusätzlich krümmt, so dass die Elektronen auf einer Torus-Oberfläche in sich zurücklaufen, wenn das Frequenzverhältnis von Umlauffrequenz um die Torus-Achse und die Rotationsfrequenz senkrecht dazu (Meridian) Verhältnisse bildet, die zu stabilen stehenden Wellen führt. Mit  $T_{p,q}$  (Torusknoten) werden Frequenzverhältnisse auf Torus-Oberflächen beschrieben. Bei  $T_{1,2}$  schwingt das Elektron stabil bei einem Umlauf zweimal in Meridianrichtung, bei  $T_{2,1}$  hingegen sind 2 Umläufe nötig, um eine volle Rotation senkrecht dazu abzuschließen (Oszillation zwischen zwei Zuständen während einer Periode, kein stabiler Zustand).

5. Das B-Feld wächst kontinuierlich, aber die abhängige Größe wechselt ständig zwischen dem (erwarteten) Zustand einer linearen Zunahme und dem (unerwarteten) Zustand einer Stagnation (Plateau). Hier deutet sich das Grundproblem des Quantenbegriffs an: Warum bringt Kontinuierliches nicht wieder Kontinuierliches hervor? Verstehen wir die Elektronenbewegung nicht allein als Translation eines Punktes sondern als Translation eines vibrierenden (schwingenden) Teilchens auf einer Schraubenbahn (verursacht durch zwei Rotationen), so muss mit zunehmender Magnetfeldstärke senkrecht zu  $v_{\text{trans}}$  die Schraubenachse gekrümmt werden. Bei hinreichend starken B-Feldern wird die Schraubenachse zum Kreis (z.B. innerhalb eines zweidimensionalen Elektronengases), die Schraubenbahn wird zur Bewegung auf einer Torus-Oberfläche und das Elektron ist einer zweifachen Schwingung (Rotation) unterworfen: Die jeweilige Kombination aus beiden kann „hin“ zu stabilen Zuständen führen oder „weg“ von ihnen. Das „Unerwartete“ entpuppt sich hier als verständliches Phänomen, das immer dann auftritt, wenn Energie auf ein komplexes System wirkt, so dass dort Frequenzverhältnisse verändert werden.

6. Markenzeichen der Quantenphänomene sind diskrete Energiebeträge, die als ganzzahlige Vielfache eines Grundzustandes in Erscheinung treten. Das Bohr'sche Atommodell des Wasserstoffatoms führt diese Tatsache auf schwingende Elektronen zurück, die nur im Zustand einer stehenden Welle strahlungsfreie Bahnen ermöglichen. Dabei spielt die Rolle des Grundzustandes als kleinstmöglicher Energiebetrag eine entscheidende Rolle.

Max Planck fiel auf, dass der Quotient aus Strahlungsenergie und Frequenz eine Konstante ist, die heute als plancksche Konstante zu den wichtigen Naturkonstanten zählt. Beim Quanten-Hall-Effekt konnte gezeigt werden, dass sämtliche gemessenen Hallwiderstände sich als rationale Vielfache bzw. Bruchteile von  $h/e^2$  darstellen lassen und damit eine neue Naturkonstante  $R_K$  (von Klitzing-Widerstand) gegeben ist.

Grundsätzlich gilt:

**„Klassische“ Linearität beschreibt das Verhalten von Einzelobjekten unter Einfluss einer einzelnen physikalischen Größe. „Moderne“ Quantenhaftigkeit hingegen beschreibt das Verhalten von Einzelobjekten unter Einfluss zweier unterschiedlichen Größen mit vergleichbarer (Kraft-)Wirkung.**

Das Einzelobjekt Elektron ist beim Quanten-Hall-Effekt gleichermaßen elektrischen und magnetischen Kraftwirkungen ausgesetzt, die beide auf Schwingungsphänomenen bzw. dreidimensional beschreibbarer Bewegung beruhen. In ihrer Überlagerung können die beiden Wirkungen komplexe Strukturen bilden, die aber z.B. mit dem Torus-Modell darstellbar sein sollten.

Prinzipiell sind solche komplexeren Strukturen mit Naturkonstanten beschreibbar, z. B.:  $R_H = k \cdot \frac{h}{e^2}$ . Wenn die Phänomene beim QHE auf Rotationen rückführbar sind, so wird verständlich, dass die reduzierte plancksche Konstante als Drehimpuls geschrieben werden kann:  $\hbar = m_0 v r$ .

7. H. Störmer und Team zeigten, dass die Plateaus auch bei gebrochenen Werten auftreten, wenn der Nenner nicht geradzahlig ist. [2]

8. Die Plateaus lassen sich als Bereiche stehender Wellen interpretieren. Die Schraubenbahn eines rotierenden Elektrons wird senkrecht zur Bewegung durch ein starkes Magnetfeld zu einem Kreis innerhalb der zweidimensionalen Hallsonde verbogen, so dass es nicht mehr zur Hall- und Längsspannung beiträgt: Der Anstieg der Hall-Kurve wird Null und der Längsstrom bricht zusammen.

9. Zwei senkrecht aufeinander stehende Rotationen lassen sich adäquat am Torus visualisieren, so dass auch Voraussagen über die experimentell möglichen Nachweise hinaus möglich sind (zumindest als Hypothesen).

10. Nicht ohne weiteres einsichtig ist, weshalb Brüche mit geradzahligem Nennern keine Plateaus zeigen: Warum bilden sich hier keine „stehenden Wellen“ heraus? Zunächst: Läuft eine einzige Welle zwischen zwei Reflexionspunkten, so ist die rücklaufende Welle bei  $l = \lambda/2$  hinsichtlich Frequenz und Wellenlänge identisch mit der hinlaufenden und liefert immer eine stehende Welle. Die beiden Rotationen beim Quantenhall-Effekt hingegen stammen aus zwei unabhängigen Quellen und müssen aufeinander abgestimmt werden – und da gibt es bei manchen Frequenzverhältnissen „stehende Wellen“, bei anderen dagegen nicht. Im Torus-Modell lässt sich zeigen, welche Verhältnisse möglich bzw. welche auszuschließen sind.

11. Mittig zwischen den Plateaus bei zwei ganzen Zahlen [1;2], [2;3], [3;4] usw. liegen bei  $3/2$ ,  $5/2$ ,  $7/2$  usw. jeweils Bereiche ohne Plateaus, wo die Kurve ansteigt (blaue Linie). Rechts und links von einem solchen Wert (z. B.  $3/2$ ) liegen symmetrisch angeordnet Werte wie  $8/5$  und  $7/5$ , deren Summe  $15/5 = 3$  ist – also eine ganze Zahl, die für einen ganzzahligen Abstand zwischen zwei Plateaus steht und am „Anfang“ und am „Ende“ wieder Plateaus haben sollte – und tatsächlich haben. Aus dem Diagramm lassen sich zwischen zwei ganzen Zahlen (mit Plateau) weitere gebrochene Zahlen ablesen, bei denen Plateaus auftreten bzw. wegen des ganzzahligen Abstandes zu erwarten sind (rote Schrift),

Zwischen 1 und 2 bei: ...,  $(13/9 + 14/9) = 3$ ,  $(11/7 + 10/7) = 3$ ,  
 $(8/5 + 7/5) = 3$ ,  $(5/3 + 4/3) = 3$ ,  $(2/1 + 1/1) = 3$

Zwischen 2 und 3 bei: ...,  $(22/9 + 23/9) = 5$ ,  $(17/7 + 18/7) = 5$ ,  $(12/5 + 13/5) = 5$ ,  $(7/3 + 8/3) = 5$ ,  
 $(3/1 + 2/1) = 5$

Zwischen 4 und 3 bei: ...,  $(38/11 + 39/11) = 7$ ,  $(31/9 + 32/9) = 7$ ,  $(24/7 + 25/7) = 7$ ,  
 $(4/1 + 3/1) = 7$

Dahinter stecken bestimmte Frequenzverhältnisse zwischen der mit  $U_{\text{längs}}$  vorgegebenen Rotationsfrequenz  $f_1$  (Meridian) und der mit  $B$  einstellbaren Umlauffrequenz  $f_2$ .

Prinzipiell lassen sich mit diesem Zusammenhang sämtliche Stellen der Quantenhalleffekt-Kurve berechnen, bei denen Plateaus bzw. normaler Anstieg zu erwarten ist, auch für gebrochene  $x$ -Werte.

Der Torusknoten  $T_{2;1} = T_{1;1/2}$  beschreibt ein Elektron, das bei einer Umlauffrequenz  $f_2 = 1$  Hz eine Rotationsfrequenz  $f_1 = 1/2$  Hz hat. Es bildet sich kein stabiler Zustand heraus (kein Plateau). Symmetrisch rechts und links von  $1/2$  liegen aber mehrere Wertepaare, die in ihrer Summe ganzzahlige Werte ergeben, z.B. die gemessenen Werte in schwarzer Schrift, weitere vorausgesagte Wertepaare in roter Schrift:

...,  $(10/21 + 11/21) = 1$ ,  $(9/19 + 10/19) = 1$ ,  $(8/17 + 9/17) = 1$ ,  $(7/15 + 8/15) = 1$ ,  $(6/13 + 7/13) = 1$ ,  $(5/11 + 6/11) = 1$ ,  $(4/9 + 5/9) = 1$ ,  $(3/7 + 4/7) = 1$ ,  $(2/5 + 3/5) = 1$ ,  $(1/3 + 2/3) = 1$

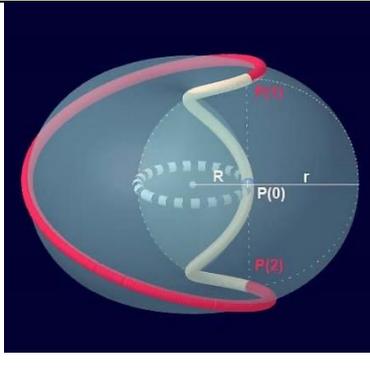
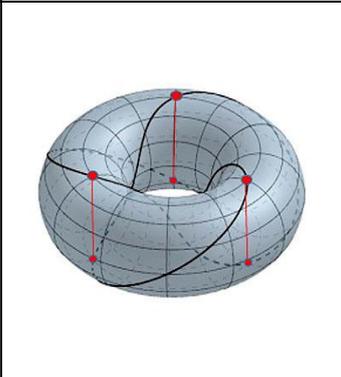
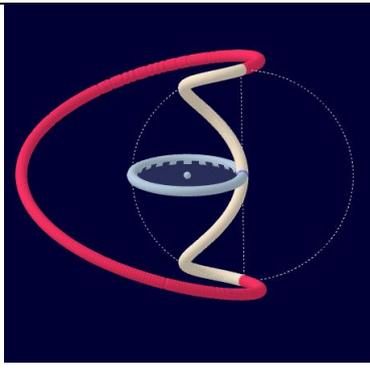
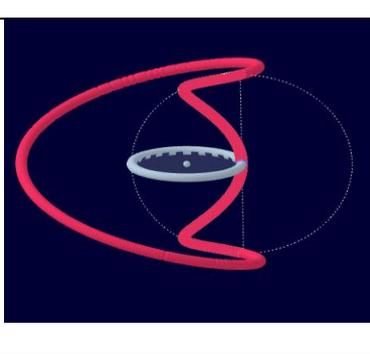
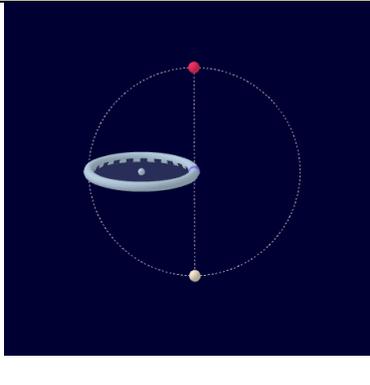
Die Plateaus zwischen zwei ganzen Zahlen gruppieren sich symmetrisch um  $3/2$ ,  $5/2$ ,  $7/2$ ,  $9/2$  usw., also um ungeradzahliges Vielfache der gebrochenen Zahl  $1/2$ . Deshalb gilt für  $1 \cdot 1/2 = 1/2$  dasselbe, da der Faktor 1 auch eine ungerade Zahl ist und keiner besonderen Untersuchung bedarf.

Es wurde anhand experimenteller Daten gezeigt, bei welchen x-Werten Plateaus bzw. kontinuierliche Anstiege der Kurve zu messen bzw. zu erwarten sind. Dabei spielten ungeradzahlige Vielfache von  $\frac{1}{2}$  eine Rolle. Die kleinste ungerade Zahl ist die Eins.

Die Messkurve zeigt, dass auch bei Multiplikation von  $\frac{1}{2}$  mit bestimmten gebrochenen Faktoren sich Plateaus bzw. normale Anstiege herausbilden können. Wird  $\frac{1}{2}$  mit der gebrochenen Zahl  $\frac{1}{2}$  bzw.  $\frac{3}{2}$  multipliziert, bilden sich vergleichbare Muster heraus wie beim Multiplizieren mit ungeraden (ganzen) Zahlen. Wir finden bei  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  bzw.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$  dieselben oben beschriebenen Strukturen. Bei Untersuchung der Frequenzverhältnisse lässt sich die Ursache für dieses Verhalten finden.

## 09 Gebrochene Frequenzverhältnisse mit geradzahigen Nennern

Ein Elektron (roter Punkt) führt zeitgleich zwei senkrecht aufeinander stehende Schwingungen aus. Es rotiert mit dem Radius  $r$  entlang der dünn gestrichelten Linie um einen Punkt  $P_0$  der gekrümmten Schraubenachse (dick gestrichelt), wobei dieser im Abstand  $R$  das Torus-Zentrum umkreist. Gebrochene Frequenzverhältnisse mit geradzahigen Nennern wie  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \dots$  führen zu klassischem Verhalten der Elektronen (keine Plateaus).

$R = \frac{1}{2} r$		$R = \frac{3}{2} r$	
	<p>Ein Umlauf von <math>P_0</math> auf dem Basiskreis (dick gestrichelt) entspricht dem halben Umlauf (<math>180^\circ</math>) des Rotationskreises (rote Spur von <math>P_1</math> bis <math>P_2</math>). 2 Umläufe sind nötig, um <math>P_0</math> eine volle Rotation zu ermöglichen.</p>		<p>Zwei Umläufe eines Punktes um das „Torusloch“ auf dem Breitenkreis entsprechen drei Rotationen in Meridianrichtung.</p>
	<p>Während <math>P_0</math> nach jedem Umlauf immer wieder am selben Ort erscheint, oszilliert der rote Punkt <math>P_1</math> alternierend zwischen <math>P_1</math> und <math>P_2</math>, das entspricht nicht den Bedingungen einer stabilen stehenden Welle.</p>		<p>Bei allen ungeradzahigen Vielfachen von <math>1/2</math> oszilliert das Elektron gleichzeitig mit zwei Frequenzen, deren Verhältnis <b>keine stehende Welle</b> (als Überlagerung) zulässt.</p>
	<p>2 Umläufe von <math>P_0</math> (<math>720^\circ</math>) auf dem Basiskreis entsprechen einer vollen Schwingung (<math>360^\circ</math>) des Rotationskreises (rote Spur von <math>P_1</math> bis wieder <math>P_1</math>, geschlossene Kurve)</p>	<p>Eigenheiten von klassischer und quantentheoretischer Naturbeschreibung:</p> <p>Ein Elektron wird klassisch als Teilchen beschrieben. Durch schwingende elektrische und magnetische Felder wirken Kräfte auf das Elektron, so dass es komplexe Bewegungen (z. B. auf einer Torus-Oberfläche) ausführen kann. Beim QHE verhält es sich jetzt wie eine aus zwei Rotationen (d.h. Schwingungen) erzeugte Welle. Das Frequenzverhältnis bestimmt nun deren Eigenschaften: a) z.B. Plateau bei <math>T_{1,1}</math>, b) <b>kein Plateau bei <math>T_{1;1/2} = T_{2;1}</math></b>, wodurch <u>das Quantenhafte als Systemeigenschaft</u> hervortritt, das Elektron selbst bleibt unverändert.</p>	
	<p>Ein Elektron (rot) erzeugt durch seine Doppelschwingung eine Struktur, die topologisch der Torus-Oberfläche äquivalent ist. Je nach Frequenzverhältnissen wird es „klassisch“ oder „quantenhaft“ gemessen.</p>		

## 10 Drehimpulserhalt als universelles Ordnungsprinzip verbindet Gravitation und Quanten

Seit in der physikalischen Naturwahrnehmung eine Erweiterung der klassischen Linearität um die moderne Quantenhaftigkeit mit Plancks Wirkungsquantum  $h$  stattgefunden hat, sind etwa 120 Jahre vergangen. Seither sind ungeheuer viele Daten gesammelt und Anwendungen erfunden worden, aber dem übergreifenden Zusammenhang „Was die Welt im Innersten zusammenhält“ ist man noch nicht überzeugend näher gekommen. Ein solcher Zusammenhang hat vermutlich zu tun mit Ordnungsprinzipien, die in allen Strukturen gleichermaßen gelten – vom ganz Großen (Kosmos) bis hin zum ganz Kleinen (Mikrowelt).

Der Quanten-Hall-Effekt hat den Gesichtskreis erheblich erweitert, so dass die Frage berechtigt ist, inwiefern die neuen Erkenntnisse auf andere Strukturen übertragbar sind. Hier bietet sich als allgemeines Ordnungsprinzip der Drehimpulserhalt an, wenn dieser für zwei Strukturen in ihrer Wechselwirkung betrachtet wird.

Es gilt in der klassischen Mechanik  $L = mvr$  und beschreibt z. B. eine rotierende Masse  $m$  mit der Geschwindigkeit  $v$  im Abstand  $r$  von der Drehachse. Verringert sich der Betrag von  $v$ , wächst  $r$ , so dass  $v \cdot r$  konstant bleibt. Erde und Mond bilden ein kosmisches Drehimpulssystem: Verliert die Erde infolge Gezeitenreibung Energie und dreht sich langsamer, so wächst der Abstand Erde – Mond jährlich etwa um 3 cm.

Wie an anderer Stelle gezeigt wurde, kann die plancksche Konstante so abgeleitet werden, dass sie als  $\frac{h}{2\pi} = \hbar = m_e r v_e$  in der Form eines Drehimpulses für einen Schwingungsvorgang erscheint. Nur ganzzahlige Vielfache von  $h$  werden beobachtet, weil  $E = hf$  nur Frequenzen  $f = 1, 2, 3, \dots$  mit der minimalen Frequenz  $f = 1$  zulässt. Das ist ein Hintergrund der beobachteten Quantelung.

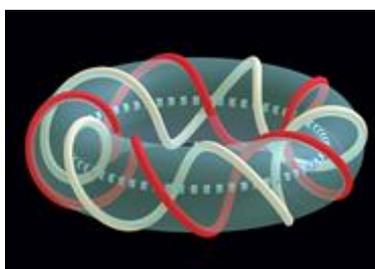
Wenn zwei gekoppelte Rotationen (Schwinger) im Spiel sind, kann es auch bei gebrochenen Frequenzen zu quantenhaften Verhalten kommen, weil hier die Frequenzverhältnisse zweier Schwinger relevant sind.

Schauen wir nach:

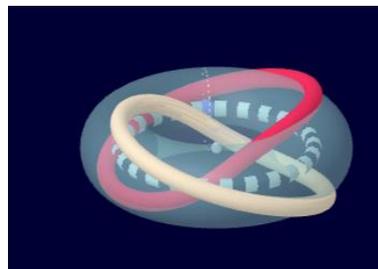
### a) Quanten-Hall-Effekt (Mikrokosmos)

Schwingung 1: Nach Beschleunigung im elektrischen Feld bewegt sich ein Elektron rotierend auf einer Schraubenbahn mit gerader Achse (rote Spur).

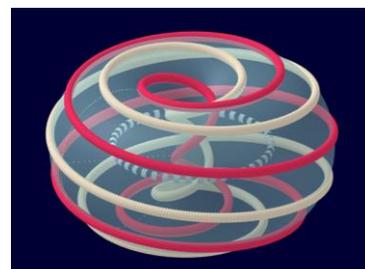
Schwingung 2: Nach Einschalten des Magnetfeldes schwingt das Elektron (infolge Lorenzkraft) zusätzlich auf einem Kreis (gepunktet) senkrecht zur Schwingungsebene 1.



*Torus  $T_{1;5}$ , 1 Umlauf mit  
5 Schwingungen*



*Torus  $T_{1;1}$ , 1 Umlauf mit  
1 Schwingung*



*$T_{1;\frac{1}{5}} = T_{5;1}$ , 5 Umläufe mit  
1 Schwingung*

Bild 14 a.b.c

Quantenverhalten wird oft mit „ganzahligen Vielfachen“ einer Grundgröße assoziiert, gilt aber auch für Brüche, wenn bei Schwingung 2 kleinere Radien als bei  $T_{1,1}$  möglich sind.

Solche Fälle lagen bisher weitgehend außerhalb der Betrachtung, da entsprechende Bedingungen zum Nachweis (zweidimensionales Elektronengas, Temperaturen unter 1 K, starke Magnetfelder) kaum realisierbar waren. Jetzt ist zu prüfen, welche Konsequenzen dieser „Tabubruch“ hat.

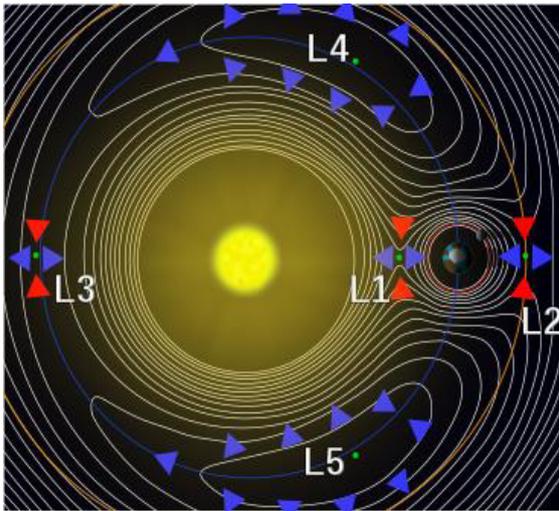
Die Bedeutung des Drehimpulses liegt hier in der Tatsache, dass ein einziges Elektron gleichzeitig zwei Rotationen mitmacht und damit auch zwei Drehimpulsen  $L = mvr$  gehorchen muss. Im Falle  $T_{1,1}$  ist der Idealfall gleicher Radien und gleicher Geschwindigkeiten beider Schwingungen (Rotationen) gegeben, der auch in einem ausgeprägten Plateau Ausdruck findet. Dieses Plateau scheint Zentrum einer Symmetrie zu sein, von der sich nach links ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) und nach rechts  $n = \frac{a}{b}$ ;  $a, b$  ganzzahlig) Ereignisreihen mit ähnlichem Verhalten erstrecken, die mit der Wechselwirkung zweier eigenständiger Drehimpulse zu tun haben. Das „Quantenhafte“ erscheint überall dort, wo Stabilität zweier Schwingungen eines Objektes durch gewisse Frequenzverhältnisse entsteht. Die aus Optik und Akustik bekannten stehenden Wellen werden mit Hilfe von Überlagerung des Hin- und Rücklaufes einer einzigen Welle erzeugt, so dass Frequenzgleichheit der Teilwellen garantiert ist. Im allgemeinen Fall ist es eher die Ausnahme, dass die Natur zwei unabhängig erzeugte, exakt gleiche bzw.  $k$ -fache Frequenzen auf ein Objekt wirken lässt. Beim Quanten-Hall-Effekt schwingt ein Elektron zunächst auf einer elektrisch verursachten geraden Schraubenbahn, die nach Einschalten des Magnetfeldes zu einer Kreisbahn gekrümmt wird. Zwei Rotationsebenen stehen hier senkrecht aufeinander. Wird das Magnetfeld kontinuierlich von Null auf einen Maximalwert geändert, zeigt das Diagramm einen (erwarteten) kontinuierlichen Anstieg, der aber von (unerwarteten) Plateaus durchsetzt ist. Diese Plateaus zeigen sich bei jenen  $B$ -Werten, wo die durch die Lorentzkraft verursachte Krümmung der Elektronenbahn mit Radius  $R$  gleich (bzw.  $k$ -fach) der Krümmung des elektrisch verursachten Schraubenbahn-Radius  $r$  ist. Zwischen diesen  $B$ -Werten zerfließen diese stabilen Zustände sehr schnell, so dass der erwartete Anstieg fortgesetzt wird.

Das „Quantenhafte“ ist also Ausdruck der „Ausnahmesituation“, dass ein Objekt mit zwei verschiedenen Frequenzen (in ihrer Überlagerung) schwingt. Es wird ein besonders stabiler Zustand erreicht, der ohne Energieaustausch aufrecht erhalten werden kann und zur Plateaubildung führt. Und solche quantenhaften Objekte, die mit zwei Frequenzen gleichzeitig stabil schwingen, lassen sich in allen Größenordnungen aufzeigen – auch im Kosmos, so dass hier ein fundamentales Ordnungsprinzip zu gelten scheint.

### **b) Lagrange-Punkte in kosmischen Systemen (Makrokosmos)**

Dabei sollten wir uns bewusst sein, dass Naturvorgänge grundsätzlich Bewegungen repräsentieren und deshalb sprachlich auch durch Verben anschaulich-adäquater ausgedrückt werden können. Helmholtz [4] verweist darauf, dass der Begriff „Kraft“ lediglich eine knappe Substantivform der Beobachtung des Bewegungs-Vorganges ist „zwei Massen (bzw. Ladungen) bewegen sich mit wachsender Geschwindigkeit aufeinander zu“.

Dieser Bewegung können Rotationsbewegungen entgegen wirken, so dass durch Wechselwirkung stabile Zustände möglich sind. Dafür spielen gewisse Abstände zwischen den beteiligten Massen (bzw. Ladungen) eine Rolle. Befindet sich zwischen Sonne und Erde ein Asteroid in solchen Abständen von den beiden Massen, wo sich beide Gravitationskräfte auf den kleinen Körper gerade kompensieren, so kann dieser dort antriebslos verharren und z. B. mit Erdgeschwindigkeit die Sonne umkreisen. Solche „Abstände gleicher Wirkung“ registrieren wir als unerwartetes Naturverhalten, das als „quantenhaft“ in die Lehrbücher einging.



Gravitation beschreibt z. B. das System Sonne –Erde mit statischen Kräfteverhältnissen, die mit durch Rotation verursachten Gegenkräften korrespondieren. Die Äquipotential-Linien des Schwerefeldes (Schnitt in der Umlaufebene) markieren 5 kräftefreie Punkte, in denen Raumsonden antriebslos ortsfest verharren können. Sind  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  „labil“ und leicht zu stören, so sind Rotationen auf Feldlinien um  $L_4$  bzw.  $L_5$  stabile Bahnen, die im senkrechten Schnitt zur Umlaufebene als Stufen von einem stabilen Plateau zum andern erscheinen. In jedem Punkt einer geschlossenen Feldlinie ist der Drehimpuls  $L = mvr$  konstant.

Bild 14

Ob sich Elektronen in zwei Feldern (elektrisch und magnetisch) oder Probemassen in zwei Gravitationsfeldern (Masse 1 und Masse 2) befinden – die Phänomene sind so ähnlich, dass sie mit gleichen mathematischen Mitteln beschreibbar sind.

Das hier vorgeschlagene Torus-Modell, dargestellt am Quanten-Hall-Effekt, versteht sich als Beitrag zum besseren Verständnis von Quantenphänomenen.

### Bild-Quellen Teil 3

- Titelseite: 1. Diagramm H. Störmer, Columbia Universität,  
aus: DPG, Physik, Denkschrift zum Jahr der Physik 2000  
2. Torusknoten, erstellt mit Geo-Gebra-App des Autors Wolfgang Gaßler
- Innentitel S.2: Torusstrukturen, erstellt mit GeoGebra-App des Autors Georg Wengler
- Kapitel 01: Bild 1, Diagramm mit Torus-Zuordnung unter Verwendung von . Diagramm H. Störmer, Columbia Universität, aus: DPG, Physik, Denkschrift zum Jahr der Physik 2000  
Bild 2, Bildfolge (3 Bilder): Lucas Vieira free (Internet), viertes Bild aus: Kleine Enzyklopädie Mathematik, Leipzig 1968
- Kapitel 02: Bild 3, Torusstruktur erstellt mit GeoGebra-Apps des Autors Georg Wengler
- Kapitel 03: Bild 4 a, b, c) erstellt mit GeoGebra
- Kapitel 04: Bild 5, erstellt mit GeoGebra  
Bild 6, Diagramm vom Autor mit GeoGebra erstellt
- Kapitel 05: Bild 7, erstellt mit Word  
Bild 8, erstellt mit GeoGebra
- Kapitel 06: Bild 9, Diagramm H. Störmer, Columbia Universität,  
aus: DPG, Physik, Denkschrift zum Jahr der Physik 2000  
Bild 10, Torusknoten, erstellt mit Geo-Gebra-App des Autors Wolfgang Gaßler
- Kapitel 07: Bild 11, erstellt mit GeoGebra-App des Autors Georg Wengler
- Kapitel 08: Bild 12, Originalgrafik in J. H. Smet: Ballistic Transport of Composite Fermions in Semiconductor Nanostructures, in Composite Fermions: a unified view of the Quantum Hall Regime, O. Heinonen, World Scienti (1998), als Abb. 27 entnommen aus: Universität Regensburg Dez. 2000, Fortgeschrittenen-Praktikum „Der Quanten-Hall-Effekt“, vom Autor K. Gebler wurden farbliche Hervorhebungen hinzugefügt.
- Kapitel 09: Bild 13, Tabelle erstellt mit GeoGebra-Apps der Autoren Georg Wengler und Wolfgang Daßler
- Kapitel 10: Bild 14 a, b, c, erstellt mit GeoGebra App des Autors Georg Wengler  
Bild 15, [Lagrange points.jpg](#): created by [NASA](#) derivative work: [Xander89](#) (talk)

### Text-Quellen Teil 3

- [1] Klaus von Klitzing, Gerhard Dorda, Michael Pepper: *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Phys. Rev. Letters, Band 45, 1980, S. 494–497 (Originalarbeit zum Quanten-Hall-Effekt)
- [2] H.L. Störmer, M. Hill: *Der fraktionale QHE*, Phys. Blätter, Nr. 9 (1984)
- [3] Arnold Sommerfeld: *Atombau und Spektrallinien*. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 2. Auflage, 1921, S. 241-242, Gleichung 8. online "*Das Verhältnis  $v_1/c$  nennen wir  $\alpha$ .*"
- [4] Hermann von Helmholtz, Einleitung zu den Vorlesungen über Theoretische Physik, J. A. Barth, Leipzig 1903 S. 1 – 30, in: R. Rompe und H.-J. Treder, Zur Grundlegung der theoretischen Physik, Akademie-Verlag Berlin 1984
- [5] Klaus von Klitzing, Beitrag zum Quanten-Hall-Effekt in: Denkschrift zum Jahr der Physik, PHYSIK, Hrsg. DPG, November 2000